

Palindromy- materiały pomocnicze na zajęcia koła matematycznego w zakresie gimnazjum

ROK SZKOLNY 2008/2009

Palindromami nazywamy takie wyrazy lub zdania, że nie zmieniają się czytane od początku i końca.

Przykłady palindromów w języku polskim:

MAMA
OKO
WÓŁ UTYL I MA MIŁY TUŁÓW
MAM KARABIN I BARAK MAM.
RADAR
ZAKAZ
POTOP
ZARAZ
KAJAK

Palindromami mogą być także liczby, na przykład 121, 1001, 71417, 212, 1001, 71417, 10000000001, 222222222, 987656789.

Zadanie 1.

Ile jest palindromów trzyszyfrowych utworzonych z liter {A,B,C,D,E}?

Rozwiązanie:

AAA, ABA, ACA, ADA, AEA
BBB, BAB, BCB, BDB, BEB
CCC, CAC, CBC, CDC, CEC
DDD, DAD, DBD, DCD, DED
EEE, EAE, EBE, ECE, EDE

Jak widać w każdym wierszu i każdej kolumnie występuje po 5 palindromów, czyli jest dokładnie $5 \cdot 5 = 25$ palindromów.

Zadanie 2.

Ile jest wszystkich trzycyfrowych liczb palindromicznych utworzonych ze wszystkich cyfr układu dziesiętnego?

Rozwiązanie:

Szukamy tych liczb ze zbioru cyfr {0,1,2,...,9}.

Układy typu 000, 010, itp. odpadają gdyż nie są liczbami.

101 202 ... 909
111 212 ... 919
... ...
191 292 ... 999

W każdym wierszu występują na początku i końcu liczb cyfry od 1 do 9, zaś w każdej kolumnie liczby o środkowych cyfrach od 0 do 9. Zatem jest dokładnie $9 \cdot 10 = 90$ trzycyfrowych liczb palindromicznych.

Zadanie 3.

Ile jest wszystkich palindromów pięciocyfrowych?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez l - liczbę utworzoną z n – cyfr. Na przykład przez $l=9$ oznaczać będziemy liczbę dziewięciocyfrową.

Dla $l=2$ mamy dokładnie 9 palindromów: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Dla $l=3$ mamy dokładnie 90 palindromów (zadanie 2)

Dla $l=4$ mamy również 90 palindromów.

Uzasadnienie:

1001 2002 ... 9009

1111 2112 ... 9119

...

1991 2992 ... 9999

W każdym wierszu jest dokładnie dziewięć liczb, zaś w każdej kolumnie jest ich dokładnie dziesięć, więc wszystkich palindromów czterocyfrowych jest dokładnie $9 \cdot 10 = 90$.

Dla $l=5$ palindromów mamy dokładnie 900. Dlaczego?

Każda liczba palindromiczna pięciocyfrowa jest postaci:

$1abc1 \ 2abc2 \ \dots \ 9abc9$

Wszystkich liczb tej postaci jest dokładnie dziewięć.

Zauważmy, że liczb palindromicznych trzycyfrowych \overline{abc} jest dokładnie 90 (zadanie 2). Pozostały symbole postaci 000,

010, 020, 030, 040, 050, 060, 070, 080, 090, czyli dokładnie jest ich 10.

Zatem w każdym wierszu mamy 9 liczb, zaś w każdej kolumnie dokładnie $90 + 10 = 100$ liczb. Ostatecznie wszystkich liczb palindromicznych pięciocyfrowych jest $9 \cdot 100 = 900$.

Zadanie 4.

Ile jest wszystkich palindromów pięciocyfrowych w systemie dwójkowym?

Rozwiązanie:

Tworzymy liczby palindromiczne ze zbioru $\{0, 1\}$

W systemie dwójkowym istnieje dokładnie jedna dwucyfrowa liczba palindromiczna 11, gdyż 00 nie jest liczbą.

Liczb palindromicznych trzycyfrowych jest dokładnie dwie: 111, 101 (dlaczego nie ma więcej?) Podobnie liczb palindromicznych czterocyfrowych jest 2, mianowicie 1111, 1001.

Liczb pięciocyfrowych jest dokładnie 4: 11111, 11011, 10001, 10101.

Zadanie 5.

Czy liczby pięciocyfrowe palindromiczne w systemie dwójkowym są palindromami w systemie dziesiętnym?

Rozwiązanie:

Zamieńmy liczby z systemu dwójkowego na dziesiętny:

$$11111 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$$

$$11011 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$

$$10001 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 17$$

$$10101 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 20$$

Widzimy, że liczby 31, 27, 17 oraz 20 nie są palindromami w systemie dziesiętnym.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Ćwiczenie 1

Ile jest wszystkich palindromów sześciocyfrowych?

Ćwiczenie 2.

Ile jest wszystkich liczbowych palindromów siedmiocyfrowych.

Wskazówka: Postępować analogicznie jak w zadaniu 5.

Ćwiczenie 3.

Ile jest wszystkich liczbowych palindromów sześciocyfrowych w systemie dwójkowym?

Ćwiczenie 4.

Ile jest wszystkich liczbowych palindromów siedmiocyfrowych w systemie dwójkowym?

Wskazówka: Postępować analogicznie jak w zadaniu 4